

Rencontre ANR microlocal : La simplification des caustiques, d'après Daniel Álvarez-Gavela

Du 13 au 15 février 2017

Les exposés auront lieu dans la tour IRMA, salle 1, non loin de l'institut Fourier.

	lundi	mardi	mercredi
9h30-10h30	Exposé 1	Exposé 5	Exposé 9
11h-12h	Exposé 2	Exposé 6	Exposé 10
14h-15h	Exposé 3	Exposé 7	Exposé 11
15h30-16h30	Exposé 4	Exposé 8	

Exposé 1 : présentation des résultats d'Álvarez-Gavela

But : introduire le sujet

Après quelques définitions, énoncé du théorème d'Álvarez-Gavela ([AG16b, theorem 1.11, 1.13]).

Theorem 1. *Soit M une variété symplectique/contact munie d'un feuilletage lagrangien/legendrien \mathcal{F} et $f : L \rightarrow M$ un plongement lagrangien/legendrien. On suppose qu'il existe, pour un entier $k \geq 1$, une homotopie $G_t : L \rightarrow \Lambda(M)$ telle que $G_0 = G(df)$ et G_1 soit Σ^k -non singulier. Alors il existe une isotopie hamiltonienne ϕ_t telle que :*

- si $k > 1$, $\phi_1 \circ f$ est Σ^k -non singulier,
- si $k = 1$, $\phi_1 \circ f$ a pour seules singularités une union de plis doubles emboîtés.

L'énoncé est valable aussi dans une version C^0 -proche, relative et paramétrique ; c'est un h-principe total.

Dans le cas $k = 1$, on peut pas en général supprimer les plis doubles et obtenir un plongement transverse à \mathcal{F} (i.e. Σ^1 -non singulier); c'est un phénomène de rigidité qui fait l'objet de l'exposé 4.

Peut-être un peu d'historique notamment sur le cas différentiable (voir les références dans [AG16b, section 1.1]). Mentionner les travaux d'Entov [Ent99].

Survol de la démonstration du théorème 1.

Exposés 2 et 3 : caustiques

But :

- nous familiariser avec les singularités des fronts lagrangiens et legendriens (caustiques).
- montrer qu'elles sont compliquées pour nous donner envie de les simplifier.

Hiérarchie des singularités : la stratification Σ^I .

Description de quelques singularités.

Présentation par fonction génératrice.

Quelques éléments de classification d'après Arnold et al, voir [Arn90].
Quelque chose sur les obstructions homotopiques à la simplification, classe de Maslov, l'exemple sans obstruction [AG16b, section 1.6].

Exposé 4 : Rigidité des singularités Σ^1 d'après Entov et Ferrand-Pushkar

but : Expliquer pourquoi on ne peut pas espérer supprimer les plis doubles dans le théorème 1.

Références [FP06] et [Ent98].

Exposés 5 : Préliminaires sur les homotopies de l'application de Gauss

but : démontrer [AG16b, proposition 3.13].

C'est la section 3 du papier, plutôt élémentaire mais technique : on réduit le cas d'une homotopie tangentielle quelconque à une suite d'homotopies tangentielles simples.

Pour l'instant on ne discute pas les plongements ridés (on saute le passage après la remarque 3.4 par exemple).

Exposés 6 et 7 : Approximation holonome

but : démontrer [AG16b, theorem 4.5].

Présenter le lemme d'approximation holonome d'Eliashberg-Mishachev puis les raffinements démontrés dans [AG16a].

Pour l'instant on ne discute pas la section 4.3 de [AG16b] qui nécessite la notion de plongement ridé.

Exposé 8 : Plongements ridés

but : introduire les plongements ridés lagrangiens/legendriens.

Présenter la notion de plongement ridé dans le cas différentiable et énoncer [EM09, theorem 2.2].

Puis présenter la notion de plongement lagrangien/legendrien ridé en suivant [AG16b, section 2].

Régularisation et aiguisage (? sharpening) des rides.

Exposés 9 et 10 : Approximation ridée

but : démontrer [AG16b, theorem 5.1].

C'est la section 5 de [AG16b]. Il est peut-être utile de regarder la preuve dans le cas différentiable [EM09, theorem 2.2].

Exposé 11 : Chirurgie des singularités et fin de la démonstration

but : en finir.

Démonstration de [AG16b, theorem 6.6]. Chirurgie des singularités et fin de la démonstration du théorème 1.

Références

- [AG16a] Daniel Alvarez-Gavela, *Refinements of the holonomic approximation lemma*, arXiv :1605.07258 (2016).
- [AG16b] ———, *The simplification of singularities of Lagrangian and Legendrian fronts*, arXiv :1605.07259 (2016).
- [Arn90] Vladimir Igorevich Arnold, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*, vol. 02, Kluwer Academic Publishers, 1990.

- [EM09] Y. M. Eliashberg and N. M. Mishachev, *Wrinkled embeddings*, Foliations, geometry, and topology, Contemp. Math., vol. 498, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 207–232.
- [Ent98] Mikhail Entov, *On the necessity of Legendrian fold singularities*, International Mathematics Research Notices **1998** (1998), no. 20, 1055–1077.
- [Ent99] ———, *Surgery on Lagrangian and Legendrian singularities*, Geometric and Functional Analysis **9** (1999), no. 2, 298–352.
- [FP06] Emmanuel Ferrand and Petr E. Pushkar, *Morse theory and global coexistence of singularities on wave fronts*, Journal of the London Mathematical Society **74** (2006), no. 2, 527–544.